Compactification de Borel-Serre

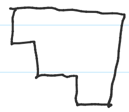
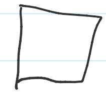
Monday, January 11, 2021 2:03 PM

I. Groupes paraboliques
II. Action géodesique
III. Composantes limites

$G < GL(n, \mathbb{R})$

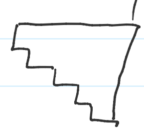
G = groupe Lie réel
K = compact maximal, $X = G/K$

I. <u>Def</u> $P < G$ est parabolique si G/P est projective

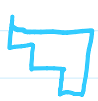
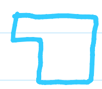
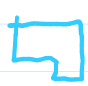
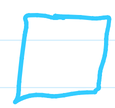
paraboliques standard $P =$  $< G =$ 

$\mathcal{P} = \{ P < G$ paraboliques rationnels $\}$ = conjugués d'un P standard par $\gamma \in G(\mathbb{Q})$

<u>Def</u> $B < G$ est un sous gp de Borel si c'est un sg connexe résoluble maximal

<u>Faits</u>
- $B < G$ Borel $\Leftrightarrow$ paraboliques minimaux
- Borel standard $B =$ 
- Tous les sg de Borel sont conjugués
- $\mathcal{P}_0 := \{$ paraboliques standard $\}$

$\forall P \in \mathcal{P}$, $\mathcal{P}_{(P \leq -)} = \{ Q \in \mathcal{P} : P \leq Q \}$ est fini.

exple $G = SL_3$, $B =$  $< \begin{matrix} P_{12} = \text{} \\ P_{21} = \text{} \end{matrix}$   $< G =$ 

<u>Paramétrisation des sous groupes paraboliques.</u>

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha ,$$

Le choix d'un ordre sur Φ, Φ^+, détermine un Borel de façon unique, et

P ... $\{ \psi \subset \Phi^+ \}$

de façon unique, et

$$\mathcal{P}_{(B \leq -)} \simeq \{ \Psi \subseteq \Phi^+ \}$$

$A_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1}$

exple $\mathfrak{sl}_n = \left(\bigoplus_{i=1,n-1} \mathbb{C} A_i \right) \oplus \bigoplus_{1 \leq i \neq j \leq n} \mathbb{C} E_{ij}$

II. Motivations

Si $\Gamma < G$ est (a) sans torsion

(b) $\Gamma \backslash X$ est compacte

$X \twoheadrightarrow \Gamma \backslash X$ est un modèle pour $K(\Gamma, 1)$:

$$H^*(\Gamma, \mathbb{Z}) \simeq H^*(\Gamma \backslash X, \mathbb{Z})$$

et

- $cd(\Gamma) \leq \dim(X)$
- $0 \to L_n \to L_{n-1} \to \dots \to L_0 \to \mathbb{Z} \to 0$ ($\mathbb{Z}\Gamma$-modules libre)
- Γ est de présentation finie.

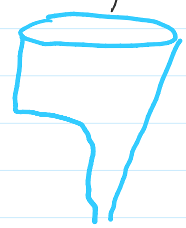
(a) n'est pas si restrictive : $\exists \Lambda < \Gamma$, $[\Gamma : \Lambda] < \infty$ tq Λ est sans torsion.

(b) est plus sérieuse : elle n'est pas vérifiée pour bcp d'exples ($SL_n(\mathbb{Z})$)

Idée Trouver une $X \hookrightarrow \overline{X}^{BS}$ tq $\overline{X}^{BS}$ = une variété analytiq à coins

et $\Gamma \backslash \overline{X}^{BS}$ soit compacte, avec $\Gamma \curvearrowright$ proprement sur $\overline{X}^{BS}$.
un modèle pour un $K(\Gamma, 1)$.

Exple $\Gamma < SL_2$ tq $\Gamma \backslash X =$

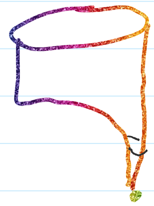


$\Vert$

une cusp

$\Gamma\backslash X \hookrightarrow \Gamma\backslash\overline{X}^{BS}$

équivalence d'homotopie

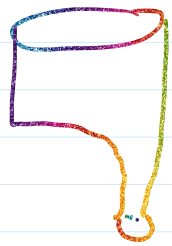
$\Gamma\backslash\overline{X}^{BS} =$ 

alors

$\pi_1(\Gamma\backslash X) \to \pi_1(\Gamma\backslash\overline{X}^{BS})$

a un noyau qui contient

$\Gamma\cap U_P$

$\Gamma\backslash\overline{X}^{BS} =$ 

Idée Attacher des cellules e_P à X pour tout $P\in\mathcal{P}$.

et $\overline{X}^{BS} = \coprod_{P\in\mathcal{P}} e_P \quad (e_G = X)$

III. Actions géodésiques

$P\in\mathcal{P}$: $P = U_P A_P M_P$, $K_P = K\cap P < M_P$

exple $SL_2 = \begin{pmatrix}1&*\\&1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}a&\\&a^{-1}\end{pmatrix} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Comme $G = PK$, $P \curvearrowright X = G/K$ est transitive :

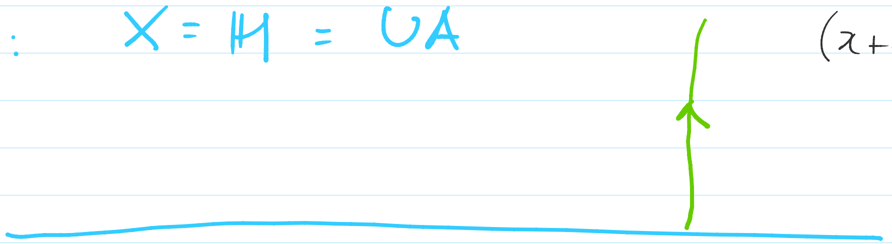
$X \cong P/K_P$.

A_P agit à droite sur X : $(gK_P)\cdot a = gaK_P$

$\forall g\in P,\ a\in A_P$.

(A_P commute à K_P)

exple SL_2 : $X = \mathbb{H} = UA$ $\qquad (x+iy)\cdot a = x + ia^2y$



lm Si $X_P = M_P / K_P$, alors : $X \simeq U_P \times A_P \times X_P$

et si $x = (u, a, z) \in X$,

$x \cdot a' = (u, aa', z) \quad \forall a' \in A_P$.

$$\begin{cases} A_P \simeq (\mathbb{R}_+^*)^\ell, & \ell = |\Phi^+(P : A_P)| \\ a \longrightarrow (\alpha(\bar{a}'))_\alpha = (\bar{a}^\alpha)_\alpha \end{cases}$$

$\bar{A}_P \simeq (\mathbb{R}_+)^\ell$ et $A_P \circlearrowleft \bar{A}_P$: $a \cdot x = (a^{-\alpha} x_\alpha)$
$\alpha = 1, \ell$

Def : si $P \in \mathcal{P}$, $X(P) = X \times_{A_P} \bar{A}_P = \dfrac{X \times \bar{A}_P}{A_P}$

$$e_P = X / A_P \simeq X \times_{A_P} \{*\}$$

$X(P) \simeq U_P \times \bar{A}_P \times X_P$

$\simeq e_P \times \bar{A}_P$: variété à coins.

lm $X(P) \simeq \coprod_{Q : P \leq Q} e_Q$ et donc $X(Q) \hookrightarrow X(P)$.

dem $\bar{A}_P = \{(x_\alpha)\}$

$$= \coprod_{\Psi \subseteq \Delta} \underbrace{\left\{ x \in (\mathbb{R}_+)^\ell : \begin{array}{ll} x_\alpha \neq 0 & \text{si } \alpha \in \Psi \\ x_\alpha = 0 & \text{si } \alpha \notin \Psi \end{array} \right\}}_{A_{PQ}}$$

$$= \coprod_{Q : P \leq Q}$$

$$X(\underline{P}) = X \times_{A_P} \overline{A}_P = \coprod_{Q\,:\,P \le Q} \underbrace{X \times_{A_{PQ}} A_{PQ}}_{e_Q}, \quad A_P = A_Q \times A_{PQ}$$

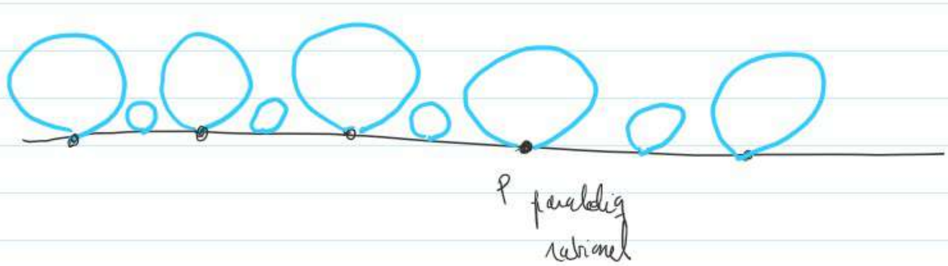
$X(Q) \hookrightarrow X(P) = \coprod_{P \le Q} e_Q$

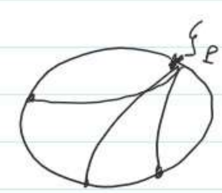
Def $\overline{X}^{BS} = \coprod_{P \in \mathcal{P}} e_P$ muni de la topologie la + fine telle que $X(P) \hookrightarrow \overline{X}^{BS}$ soit un plongement ouvert.

$\coprod X(P) / \sim$: $X(P) \cap X(Q) = X(R)$

R = + petit parabolique qui contient P et Q.

exple SL_2 :





Thm [BS] $\overline{X}^{BS}$ est une variété à coins séparée et $G(\mathbb{Q}) \curvearrowright X$ s'étend à $\overline{X}^{BS}$

et $G(\mathbb{Q}) \curvearrowright X$ s'étend à $\overline{X}^{BS}$

et alors $\Gamma \curvearrowright$ proprement sur $\overline{X}^{BS}$ et

$\Gamma \backslash \overline{X}^{BS}$ est compacte.

Action de $G(\mathbb{Q})$ sur $\overline{X}^{BS}$?

$X \times_{A_{\underline{P}}} \bar{A}_{\underline{P}}$, $e(\underline{P}) \xrightarrow{\gamma} e(\gamma \underline{P} \gamma^{-1})$.